Πραγματική Ανάλυση

Άσκηση

• $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής.

νδο $f=0$

Αποδ

$\int_0^1 P(x) f(x)\, dx = 0$, $\forall$ πολυώνυμο $\overset{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{\overset{\shortparallel}{P(x)}}$ • Από Θεώρημα Stone-Weierstrass

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\exists$ ακολουθία $\{P_n\}$ πολυωνύμων τ.ω

$P_n \xrightarrow[\text{μορφα}]{\text{ομοιό}} f$ στο $[a,b]$ $\Rightarrow P_n f \xrightarrow{\text{ομ}} f^2 \Rightarrow \int_0^1 P_n f\,dx \to \int_0^1 f^2 dx \Rightarrow 0 \to \int_0^1 f^2 dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2 dx = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f=0.$ #

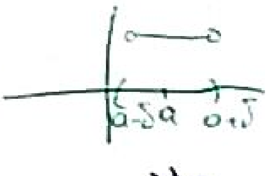
• Χωρίς το Θεώρημα Stone-Weierstrass.

Έστω ότι $\exists\, a \in (0,1)$ τ.ω $f(a)>0 \xRightarrow{f \text{ συν}} \exists\, \delta>0$, τέτοιο ώστε

$f(x)>0 \quad \forall x\in(a-\delta,a+\delta)$

Αν $\int_0^1 g(x)f(x)dx = 0$ ορίζουμε την $g(x) = \begin{cases} 1, & x\in(a-\delta,a+\delta) \\ 0, & \text{~~κα~~ αλλιώς} \end{cases}$

$\overset{\shortparallel}{0 < \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)dx}$



• Στόχος: Έστω $\varepsilon>0$ Να βρεθεί ακολουθία συναρτήσεων

$g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, τ.ω: 1) $\int_0^1 g_n(x) f(x)dx = 0 \ \forall n$

2) $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο $(0, a-\delta-\varepsilon)$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} (a+\delta+\varepsilon, 1)$,

$g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο $(a-\delta+\varepsilon, a+\delta-\varepsilon)$

3) $\{g_n\}$ φραγμένη: $\exists M_1>0$ τ.ω $\forall x\in[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|g_n(x)| \le M_1$

• Λήμμα

Αν $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$, f φραγμένη $\Rightarrow fg_n \xrightarrow{\text{ομ}} fg$

Αποδ

Έστω $\epsilon>0$. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τω $\forall x\in X$, $\forall n\geq n_0$, $|g_n(x)-g(x)|<\frac{\epsilon}{M}$

όπου $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in X \Rightarrow \forall n\geq n_0$ $|g_nf(x)-gf(x)|=|g_n(x)-g(x)|\cdot|f(x)|$

$\leq M|g_n(x)-g(x)|<\epsilon$ ▪

Επομένως για την Άσκηση:

$g_n\cdot f \xrightarrow{\text{ομ}} g\cdot f$ στο $[0,a-\delta-\epsilon)$, στο $(a+\delta+\epsilon,1]$, στο $(a-\delta+\epsilon,a+\delta-\epsilon)$

$$\Rightarrow \int_0^{a-\delta-\epsilon} g_nf\,dx \to \int_0^{a-\delta-\epsilon} g\cdot f=0,\quad \int_{a+\delta+\epsilon}^{1} g_nf \to \int_{a+\delta+\epsilon}^{1} g\cdot f=0$$

$$\int_0^1 g_n f\,dx=0 \Rightarrow \underbrace{\int_0^{a-\delta-\epsilon} g_nf\,dx}_{A_n} + \underbrace{\int_{a-\delta-\epsilon}^{a-\delta+\epsilon} g_n f\,dx}_{B_n} + \underbrace{\int_{a-\delta+\epsilon}^{a+\delta-\epsilon} g_nf\,dx}_{\Gamma_n} + \underbrace{\int_{a+\delta-\epsilon}^{a+\delta+\epsilon} g_nf\,dx}_{D_n} + \underbrace{\int_{a+\delta+\epsilon}^{1} g_nf\,dx}_{E_n}$$

$$|B_n|\leq \int_{a-\delta-\epsilon}^{a-\delta+\epsilon} |g_nf|\,dx \leq 2M\cdot M_1\cdot\epsilon, \text{ ομοίως } |D_n|\leq 2M\cdot M_1\cdot\epsilon$$

$$\cdot\, A_n\to 0,\ E_n\to 0,\ \Gamma_n=\int_{a-\delta+\epsilon}^{a+\delta-\epsilon} g_nf\,dx \Rightarrow \Gamma_n\to\int_{a-\delta+\epsilon}^{a+\delta-\epsilon} f$$

$$\overset{\to 0}{A_n}+\Gamma_n+\overset{\to 0}{E_n}-4M\cdot M_1\cdot\epsilon \leq \underbrace{A_n+B_n+\Gamma_n+D_n+E_n}_{0} \leq \overset{\to 0}{A_n}+\Gamma_n+\overset{\to 0}{E_n}+4M\cdot M_1\cdot\epsilon \overset{\text{όρια}}{\Longrightarrow}$$

$$-4M\cdot M_1\cdot\epsilon+\int_{a-\delta+\epsilon}^{a+\delta-\epsilon} f \leq 0 \leq \int_{a-\delta+\epsilon}^{a+\delta-\epsilon} f + 4M\cdot M_1\cdot\epsilon \Rightarrow$$

$$-4M\cdot M_1\cdot\epsilon \leq \int_{a-\delta+\epsilon}^{a+\delta-\epsilon} f \leq 4M\cdot M_1\cdot\epsilon \overset{\epsilon\to 0^+}{\Longrightarrow} 0<\int_{a-\delta}^{a+\delta} f=0, \text{ άτοπο.}$$

· $\int_0^1 P(x) f(x) dx = 0$, $\forall$ πολυώνυμο $P(x)$

· Υπόθεση

$\int_0^1 k(x) \cdot f(x) dx = 0$, $\forall\, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τω $k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \lim_{u \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{u} a_n \cdot x^n \right) = P_u(x)$

Θέτουμε $g_u(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{\delta}\right)^{2u}}$, $x \in \mathbb{R}$

Στόχος 1) Ισχύει από Υπόθεση ($\kappa\ g_u(x)$ που θέσαμε γράφεται σαν δυναμοσειρά)

2) $x \in$ ~~$(\ldots)$~~ $(a-\delta+\epsilon, a+\delta-\epsilon)$: $\frac{-\delta+\epsilon}{\delta} \leq \frac{x-a}{\delta} \leq \frac{\delta-\epsilon}{\delta} \Rightarrow \left| \left(\frac{x-a}{\delta} \right)^{2u} \right| \leq \left(\frac{\delta-\epsilon}{\delta} \right)^{2u} \Rightarrow$

$e^{-\left(\frac{\delta-\epsilon}{\delta}\right)^{2u}} \leq e^{-\left(\frac{x-a}{\delta}\right)^{2u}} \leq e^{\left(\frac{\delta-\epsilon}{\delta}\right)^{2u}} \Rightarrow g_u \to g$ στο $(a-\delta+\epsilon, a+\delta-\epsilon)$

Ομοίως για τα άλλα δύο διαστήματα.

Θ.Δ.Ο $P_u \xrightarrow{o\mu} k$ στο $(-t, t)$, $\forall\, t > 0$

$|k(x) - P_u(x)| = \left| \sum_{n=u+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=u+1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \leq \sum_{n=u+1}^{\infty} |a_n| \cdot |t|^n$

Όμως, $\sum_{u=0}^{\infty} |a_u t^u|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=u+1}^{\infty} |a_n| |t|^n \xrightarrow{u \to \infty} 0 \Rightarrow$ Αν $\epsilon > 0$, $\exists\, u_0 \in \mathbb{N}$, τω

$\forall\, u \geq u_0$, $\sum_{n=u+1}^{\infty} |a_n| \cdot |t|^n < \epsilon \Rightarrow \forall\, x \in (-t, t) : |k(x) - P_u(x)| < \epsilon \Rightarrow P_u \xrightarrow{o\mu} k$

στο $(-t, t)$ ∎

Θεώρημα

Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει στο $(-M, M)$, τότε $\forall\, t < M$, η ακ. των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-t, t)$

Ασκηση

f_ν συνεχής στο $[0,1]$. $f_\nu \xrightarrow[\text{σημείο}]{\text{κατά}} f$, f συνεχής στο $[0,1]$

$f_\nu \xrightarrow{\text{ομ}}\!\!\!\!\!/\;\, f$

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \nu \cdot x &, 0 \leq x < \frac{1}{\nu} \\ 2 - \nu \cdot x &, \frac{1}{\nu} \leq x < \frac{2}{\nu} \\ 0 &, x \geq \frac{2}{\nu} \end{cases} \qquad f_\nu \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$$

Έστω $1 \geq x > 0$ $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$, τω $x > \frac{2}{\nu} \Rightarrow \forall \nu \geq \nu_0$, $f_\nu(x) = 0 \to 0$ Επίσης $f_\nu(0) = 0 \to 0$

$f_\nu \xrightarrow{\text{ομ}}\!\!\!\!\!/\;\, 0$ Αν $f_\nu \xrightarrow{\text{ομ}} 0$, τότε $\forall \{x_\nu\} \subseteq [0,1]$, τω $x_\nu \to x \in [0,1]$ έχουμε $f_\nu(x_\nu) \to f(x) = 0$. Παίρνουμε $x_\nu = \frac{1}{\nu} \Rightarrow f_\nu(\frac{1}{\nu}) = 1 \not\to 0$. άτοπο

Ασκηση

$f_\nu \xrightarrow{\text{ομ}} f$, $x_\nu \to x$, τότε $f_\nu(x_\nu) \to f(x)$

Έστω $\epsilon > 0$. $\exists\, \nu_0 : \forall \nu \geq \nu_0$, $|f_\nu(y) - f(y)| < \epsilon$, $\forall y \in X$

$\exists\, \nu_0' : \forall \nu \geq \nu_0'$, $d(x_\nu, x) < \delta$

f συνεχής $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, τω $\forall y \in X$, με $d(x,y) < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon \Rightarrow$

$|f_\nu(x_\nu) - f(x)| \leq |f_\nu(x_\nu) - f(x_\nu)| + |f(x_\nu) - f(x)| < 2\epsilon$, $\forall \nu \geq \max\{\nu_0, \nu_0'\}$

Αν $f_\nu \xrightarrow{\text{ομ}}\!\!\!\!\!/\;\, f$: $f_\nu(x) = x^\nu$, $x \in [0,1]$ Αν $x_\nu = 1 - \frac{1}{\nu} \to 1$, $f_\nu(x_\nu) = (1 - \frac{1}{\nu})^\nu \to$ $e^{-1} \neq 1 = f(1)$

Ασκηση

$\{f_n\}$ φθίνουσα στο $[0,1)$, τω $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, f συνεχής, $f_n \not\xrightarrow{ομ} f$

$f_n(x) = x^n$: φθίνουσα (ως προς n), $f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$ στο $[0,1)$

$f_n \xrightarrow{ομ} f$: $\forall \epsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [0,1)$

$f_n \not\xrightarrow{ομ} f$: $\exists \epsilon>0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [0,1)$, τω $x_n^n \geq \epsilon$

Παίρνω $x_n = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow x_n^n \to e^{-1} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \geq n_0$ $x_n^n > e^{-1}/2$

Για $\epsilon = e^{-1}/2$ ■

Ασκηση

Αν $f_n \xrightarrow{ομ} f \Rightarrow \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$

Έστω $\epsilon>0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \geq n_0$. $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. $\forall x \in [0,1]$

$$\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 \epsilon\, dx, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$$ ■

Ασκηση

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μονότονη, $\forall n$, τω $\forall x \in A$. όπου $\bar{A} = \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει.
Νδο $\lim f_n(x)$ υπάρχει παντού εκτός από το πολύ αριθμήσιμου πλήθους σημεία

Αποδ

Έστω ότι f_n είναι αύξουσα τιμών

Θέτουμε $f(x) = \limsup f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x < x_2 \Rightarrow$

$\underset{\in \mathbb{R}}{\lim f_n(x_1)} \leq \limsup f_n(x) \leq \lim f_n(x_2) \in \mathbb{R}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow$

$f_n(x_1) \leq f_n(x_2) \Rightarrow \underbrace{\limsup f(x_1)}_{f(x_1)} \leq \underbrace{\limsup f(x_2)}_{f(x_2)} \Rightarrow f$ αύξουσα

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A'$ τα σύνολα ασυνέχειας των $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots, f$

Αν $B = A' \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow B$ το πολύ αριθμήσιμο.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus B$. $\exists\, \xi \in A$, ώστε $|x_0 - \xi| < \delta$. Έστω, π.χ. $\xi > x_0 \Rightarrow$

$f(\xi) > f(x_0) > f(\xi) - \epsilon \Rightarrow f_n(\xi) > f_n(x_0) > f_n(\xi) - \epsilon \Rightarrow$

$f(\xi) > \limsup f_n(x_0) > f(\xi) - \epsilon.$